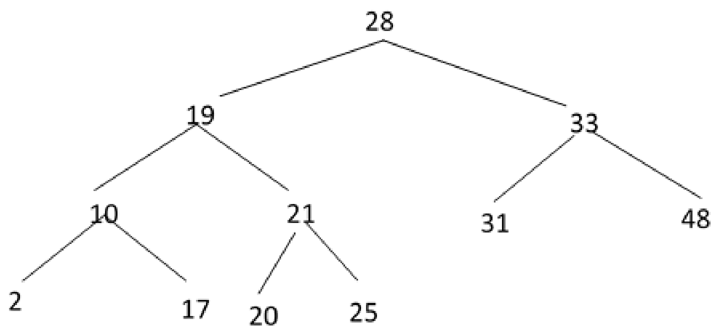
USTHB
Faculté d'Electronique et d'Informatique
Département D'Informatique
Master SII
Algorithmique avancée et complexité **Bab-Ezzouar 15 novembre 2016**

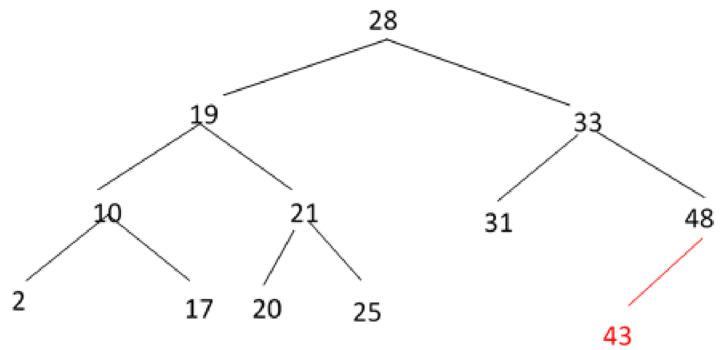
Corrigé du test de contrôle

Exercice 1 : (5 pts)

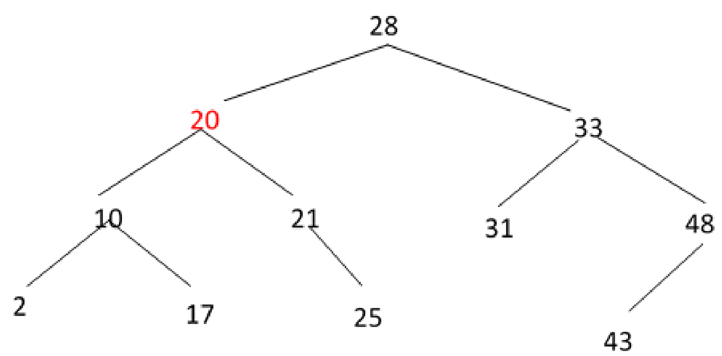
Considérer l'arbre binaire de recherche suivant :



1) insérer le nombre 43 dans l'arbre.



2) Ensuite supprimer le nombre 19 de l'arbre.



3) Ecrire un algorithme de suppression d'un élément d'un arbre binaire de recherche.

L'algorithme passe par 4 étapes qui sont :

1. Recherche de la valeur *x* dans l'arbre.
2. Recherche de la valeur minimale du sous-arbre droit du nœud contenant *x* ou bien de la valeur maximale du sous-arbre gauche du nœud contenant *x*. Soit y, cette valeur.
3. Suppression du nœud contenant *y*.
4. Remplacer *x* par *y*.

```
Algorithme Suppression d'un élément d'un arbre binaire de recherche
Programme principal
var racine : ↑élément ; a : entier ;
début   suppression (a) ; fin

procédure suppression ;
entrée : racine :↑élément; x :entier ;
sortie : l'arbre binaire de recherche sans le nœud contenant x ;
var nœud, p, prédécesseur, parent :↑élément ; existe : booléen ; y : entier ;
début   nœud := racine ;
        existe := faux ;
        tant que (noeud ≠ nil) et non existe  faire
           (* recherche de la clé x dans l'arbre *)
               si (x = nœud↑.clé) alors existe := vrai
               sinon début prédecesseur := nœud ;
                          si (x < nœud↑.clé) alors nœud := nœud↑.fgauche
                          sinon nœud := nœud↑.fdroit ;
                     fin ;
        si (nœud = nil) alors signaler ('x n'existe pas dans l'arbre')
        sinon si (x = nœud↑.clé) alors
              début
                 p := nœud↑.fdroit ;
               (* recherche de la clé minimale du sous-arbre droit *)
                si (p ≠ nil) alors tant que (p↑.fgauche ≠ nil) faire
                       début   parent := p ;
                               p := p↑.fgauche ;
                       fin ;
               (* recherche de la clé maximale du sous-arbre gauche *)
               sinon début p := nœud↑.fgauche ;
```

```
                si (p ≠ nil) alors tant que (p↑.fdroit ≠ nil) faire
                      début   parent := p ;
                              p := p↑.fdroit ;
                      fin ;
                        sinon (* le nœud contenant x n'a pas de successeur alors
            suppression de ce nœud *)
                        si (nœud = racine) alors racine := nil
                        sinon prédecesseur↑.fdroit := nil ;
          fin ;
      si (nœud↑.fgauche ≠ nil) ou (nœud↑.fdroit ≠ nil) alors
                début   (* remplacer x par y *)
            y := p↑.clé ;
                      nœud↑.clé := y ;
                      (* supprimer le nœud contenant y *)
            si (p↑.fgauche = nil) alors parent↑.fgauche := p↑.fdroit
                              sinon parent↑.fdroit := p↑.fgauche ;
                fin
      fin
fin ;
```

4) Calculer la complexité de l'algorithme.

La recherche de l'élément *x* à supprimer se fait en *$O(log_2(n))$=p où p est la profondeur de l'arbre et n le nombre de noeuds. L'opération de recherche de l'élément du sous-arbre droit qui a la plus petite valeur pour remplacer x s'effectue aussi en $O(log_2(n))$, de même pour la recherche de la clé maximale du sous-arbre gauche. La complexité est donc $O(log_2(n))$.*

Exercice 2 : (5 pts)

1) Rappeler la représentation d'un ensemble S vue en cours.

Une représentation possible d'un ensemble S, qui facilite l'écriture des opérations union et intersection entre deux ensembles, utilise deux tableaux TV (Tableau des Valeurs) et VR (Vecteur Représentatif de l'ensemble S). Le tableau TV contient toutes les valeurs susceptibles d'appartenir à un ensemble S. *TV[max]* contient le nombre de valeurs de TV. VR, le vecteur représentatif de S, est un vecteur de nombres booléens défini comme suit :

$$VR[i] = \begin{cases} 1 & si\ TV[i] \in S \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2) Comment implémenter les opérations suivantes :
   a. Appartenance d'un élément à un ensemble.

```
Procédure appartenance ;
entrée : TV : tableau d'entiers ; VR : tableau de booléens ; x : entier ;
sortie : vrai ou faux ;

var p : entier ;
début      p :=1;
tant que (p <= TV[max]) et (TV[p] ≠ x) faire p := p+1 ;
si (TV[p] = x) et (VR[p]=1) alors retourner(vrai)
```

sinon retourner(faux) ;

fin

b. Union de deux ensembles.

procédure *union ;*

entrée *: TV :* ***tableau d'entiers*** *; VR_1, VR_2 :* ***tableau de booléens*** *;*

sortie *: VR_3 :* ***tableau de booléens;***

var *i : 1 ..max ;*

début

pour *(i := 1* ***à*** *TV[max])* ***faire***

VR_3[i] := VR_1[i] ***ou*** *VR_2[i] ;*

*(** ***ou*** *est l'opérateur booléen de disjonction *)*

fin ;

c . Intersection de deux ensembles.

procédure *intersection ;*

entrée *: TV :* ***tableau d'entiers*** *; VR_1, VR_2 :* ***tableau de booléens*** *;*

sortie *: VR_3 :* ***tableau de booléens;***

var *i : 1 ..max ;*

début

pour *(i := 1* ***à*** *TV[max])* ***faire***

VR_3[i] := VR_1[i] ***et*** *VR_2[i] ;*

*(** ***et*** *est l'opérateur booléen de conjonction *)*

fin ;

Calculer la complexité de chacune de ces opérations

La complexité de la procédure appartenance est *O(TV[max])* car au pire cas, *x* n'appartient pas à TV et la boucle aura un nombre d'itérations égal à *TV[max]*.
Les procédures *union* et *intersection* ont chacune une complexité en *O(TV[max])* car la boucle *pour*, a un nombre d'itérations égal à *TV[max]*.

3) Ecrire la procédure d'insertion d'un élément dans un ensemble et calculer sa complexité.

Procédure *insertion ;*

entrée *: TV :* ***tableau d'entiers*** *; VR :* ***tableau de booléens*** *; x :* ***entier*** *;*

sortie *: TV :* ***tableau d'entiers*** *; VR :* ***tableau de booléens*** *;*

var *p :* ***entier*** *;*

début *p :=1;*

tant que *(p <= TV[max])* ***et*** *(TV[p] ≠ x)* ***faire*** *p := p+1 ;*

si *(TV[p] ≠ x)* ***alors début*** *TV[p] := x ;*

TV[max] := TV[max] +1 ;

fin *;*

VR[p] :=1 ;

fin

La complexité de la procédure insertion est *O(TV[max])* car au pire cas, *x* n'appartient pas à TV et la boucle aura un nombre d'itérations égal à *TV[max]*.

4) Ecrire la procédure de suppression d'un élément d'un ensemble et calculer sa complexité.

Procédure *suppression ;*
entrée *: TV :* ***tableau d'entiers*** *; VR :* ***tableau de booléens*** *; x :* ***entier*** *;*
sortie *: TV :* ***tableau d'entiers*** *; VR :* ***tableau de booléens*** *;*

var *p :* ***entier*** *;*
début *p :=1;*
tant que *(p <= TV[max])* ***et*** *(TV[p] ≠ x)* ***faire*** *p := p+1 ;*
si *(TV[p] = x)* ***alors***
si *(VR[p] =0)* ***alors*** *afficher ('x n'existe pas dans l'ensemble')*
sinon *VR[p] := 0 ;*
fin

La complexité de la procédure suppression est *O(TV[max])* car au pire cas, *x* n'appartient pas à TV et la boucle aura un nombre d'itérations égal à *TV[max]*.