TD6

Prof. Habiba Drias

Exercices

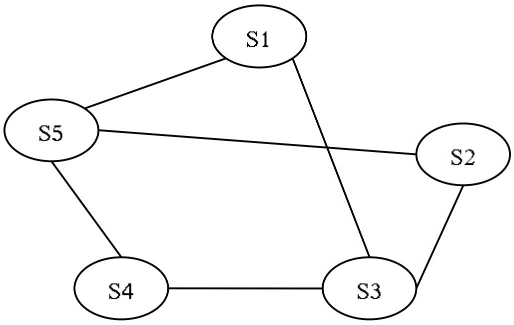
Exercice 6.1

Considérer le problème de *la couverture des sommets* décrit comme suit :

Instance: *Un graphe non orienté G=(S,A) où S={s_1, s_2, …, s_n} est l'ensemble des sommets, A={<s_i,s_j> tel que s_i et s_j ∈ S} est l'ensemble des arêtes et k un entier naturel.*

Question: *Existe-il un sous ensemble S′ de S tel que si <s_i,s_j> ∈ A alors s_i ∈ S′ ou bien s_j ∈ S' ou bien les deux appartiennent à S' et la cardinalité de S' est égal à k ?*

Considérer le graphe G non orienté suivant :



1) Quelles sont les couvertures des sommets de cardinalité égale à 2 de G ?
2) Ecrire un algorithme de détermination d'une couverture des sommets d'une cardinalité égale à *k*. Calculer sa complexité.
3) Montrer que le problème de la couverture des sommets appartient à la classe NP.

Exercice 6.2

1) Définir de manière formelle le problème 3-SAT.
2) Montrer que le problème 3-SAT est NP-complet.

Exercice 6.3

Considérer les cinq problèmes suivants :

1. **Le problème de *la couverture des sommets*** :

Instance: *Un graphe G = (S,A) non orienté où S est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes et un entier positif k ≤ /S /.*

Question: *Existe-il une couverture des sommets de taille inférieure ou égale à k pour G, i.e, un sous-ensemble S' ⊆ S tel que /S'/ ≤ k et pour chaque arête {u,v} ∈ A, au moins un des deux sommets u et v appartient à S'?*

2. **Le problème de la partition :**

Instance: *Un ensemble fini A et une taille s(a) pour chaque a ∈ A.*

Question: *existe-il un sous-ensemble A' ⊆ A tel que* $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$ *?*

3. **Le problème de *la clique*** :

Instance: *Un graphe G = (S,A) non orienté et un entier positif J ≤ /S/.*

Question: *G contient-il une clique de taille J ou plus, i.e, un sous-ensemble S' ⊆ S tel que /S'/ ≥ J et chaque deux sommets de S' sont reliés par une arête de A?*

4. **Le problème du *cycle hamiltonien*** :

Instance: *Un graphe G = (S,A) non orienté où S est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes.*

Question: *G contient-il un cycle hamiltonien ? plus précisément existe-il un chaine* $<s_1, s_2, \dots , s_n>$ *dans G où* $n = |S|$ *passant par tous les sommets une et une seule fois, tel que* $\{s_n,s_1\} \in A$ *et* $\{s_i,s_{i+1}\} \in A$ *pour tout i,* $1 \le i < n$*?*

5. **Le problème du *sac à dos* :**

Instance: *Un ensemble fini U de taille* $s(u) \in Z^+$ *et une valeur* $v(u) \in Z^+$ *pour chaque* $u \in U$*, une contrainte de taille* $B \in Z^+$ *et une valeur cible* $k \in Z^+$.

Question: *Existe-il un sous ensemble* $U' \subseteq U$ *tel que* $\sum s(u) \le B$ *et* $\sum v(u) \ge k$ *?*

En supposant que les quatre premiers problèmes sont NP-complets, démontrer que le problème du sac à dos est aussi NP-complet.

Exercice 6.4

Considérer les deux problèmes suivants :

1. **le problème du *voyageur de commerce ou PVC* en abrégé.**
Etant donnée une carte géographique de villes et des distances les reliant, un voyageur est appelé à visiter toutes les villes une et une seule fois telle que la distance parcourue au total n'excède pas une constante *k*. La description formelle du problème est comme suit :

Instance : *un ensemble de n villes V = {v1, v2, …, vn}, un ensemble de routes A={ (vi, vj}, il existe une route entre vi et vj dont la distance est égale à dij } et une constante égale à k.*

Question : *Existe-il un trajet englobant toutes les villes une et une seule fois tel que la somme des distances des routes constituant le trajet est inférieure ou égale à k ?*

2. **Le problème du *cycle Hamiltonien ou PCH* en abrégé.**

Instance: *Un graphe G = (S, A) non orienté où S est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes.*

Question: *G contient-il un cycle hamiltonien ? i. e, existe-il un chaine* $<s_1, s_2, \dots , s_n>$ *dans G où* $n = |S|$ *passant par tous les sommets une et une seule fois, tel que* $\{s_n,s_1\} \in A$ *et* $\{s_i,s_{i+1}\} \in A$ *pour tout i,* $1 \le i < n$*?*

Questions :

1) Ecrire un algorithme pour résoudre le problème du voyageur de commerce PVC.
   a) Décrire clairement les structures de données utilisées
   b) Préciser également les techniques de conception de l'algorithme
2) Illustrer votre algorithme sur la donnée réelle de la figure 7.1. du cours.
3) Calculer la complexité du pire cas de l'algorithme proposé.
4) Montrer que les deux problèmes PVC et PCH appartiennent à la classe NP.
5) Montrer qu'il existe une transformation polynomiale du problème de la couverture des sommets vers le problème du cycle hamiltonien. Déduire que le problème du cycle hamiltonien est NP-complet.
6) Montrer que le problème du voyageur de commerce est NP-complet.

Exercice 6.5

Montrer que la classe P est incluse dans la classe co-NP.

Exercice 6.6

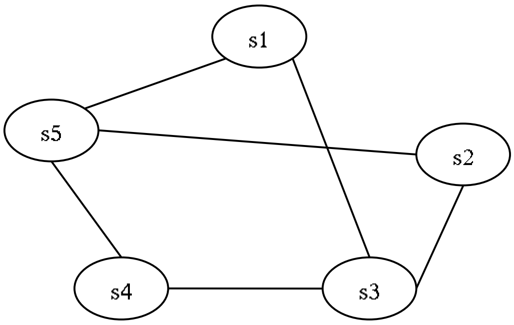
Considérer le problème de *la clique* décrit comme suit :

Instance: *Un graphe non orienté G=(S,A) où S={s_1, s_2, ..., s_n} est l'ensemble des sommets, A={<s_i,s_j> tel que s_i et $s_j \in S$} est l'ensemble des arêtes et k un entier naturel.*

Question: *Existe-il une k-clique dans G ?*

Rappelons qu'une k-clique est un sous graphe complet de k sommets.

Considérer le graphe non orienté G où G = (S, A), S = {s1, s2, s3, s4, s5} et A l'ensemble des arêtes montrées sur le schéma suivant :



1) Quelles sont les cliques de cardinalité égale à 3 de G ?
2) Ecrire un algorithme de détermination d'une clique d'une cardinalité égale à k.
   a) Expliquer clairement toutes les structures de données utilisées dans votre algorithme.
   b) Calculer sa complexité.
3) Montrer que le problème de la clique appartient à la classe NP.
   a) Expliquer clairement les structures de données utilisées.
   b) Expliciter l'algorithme de vérification ou validation d'une instance.

Exercice 6.7

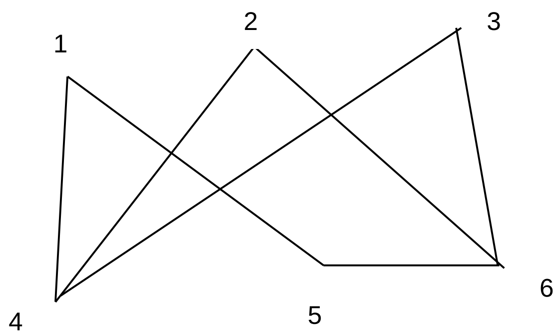
Considérer le problème de coloriage d'un graphe appelé PCG et décrit comme suit :

Instance : *un graphe G = (S, A) et un entier k positif. S et A représentent respectivement l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes du graphe. n est le nombre de sommets et m, le nombre d'arêtes.*

Question : *Peut-on colorier les sommets de G avec k couleurs différentes telles que deux sommets adjacents ne doivent pas avoir la même couleur ?*

Nous considérons par ailleurs le concept de solution au sens large pour le problème. Une solution est dite positive si elle répond par l'affirmative à la question. Elle est dite négative dans le cas contraire.

Soit k=3 et le graphe suivant :



1) A quoi correspond une solution potentielle du problème PCG ? Donner un exemple de solution positive et un autre de solution négative.
2) Donner une structure de données pour représenter une solution.
3) On s'intéresse à construire des solutions possibles. Ecrire un algorithme permettant d'engendrer une solution quelconque.

4) Ecrire un algorithme permettant de vérifier si la solution engendrée est positive ou négative. Calculer sa complexité.
5) Que peut-on conclure sur le problème PCG ?

Exercice 6.8

Considérer **le problème suivant de la *Tour de Hanoi ou PTH* en abrégé** vu au chapitre 4**.**

1) Ecrire un algorithme itératif pour résoudre le problème de la tour de Hanoi.
   a) Décrire clairement les structures de données utilisées.
   b) Préciser également les techniques de conception de l'algorithme.
   Indication : algorithme de recherche aveugle
2) Illustrer votre algorithme sur un nombre de disques égal à 3.
3) Calculer la complexité du pire cas de l'algorithme proposé.
4) Montrer que le problème PTH appartient à la classe NP.
5) Le problème de satisfiabilité SAT étant NP-complet, montrer que le problème PTH est NP-complet.